第20講　置換積分

20

［A］ (5)までは不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．また，(6)以降は定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{(2-x^2)^4}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$

(5) $\displaystyle\int\sin(\log x)dx$

(6) $\displaystyle\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ．

(2) (1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　置換積分

20　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする．

(1)　I_1 を求めよ．

(2)　I_n+I_{n+2} を求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　置換積分

20

［A］ (5)までは不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．また，(6)以降は定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{(2-x^2)^4}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$

(5) $\displaystyle\int\sin(\log x)dx$

(6) $\displaystyle\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ．

(2) (1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

【答】 ［A］ (1) $-\dfrac{1}{4(2-x^2)^2}+\dfrac{1}{3(2-x^2)^3}+C$

(2) $\dfrac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}}-\dfrac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}+2(e^x+1)^{\frac{1}{2}}+C$　(3) $\dfrac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\dfrac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

(4) $2\log(1+\sqrt{x})+C$　(5) $\dfrac{x}{2}\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C$　(6) $\dfrac{\pi}{12}$　(7) $\dfrac{\pi}{6}$

［B］ (1) $y=g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$　(2) 略

【解説】

［A］ (1) $2-x^2=t$ とおくと $-2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x^3dx=-\dfrac{1}{2}x^2dt$　よって

$x^3dx=-\dfrac{1}{2}(2-t)dt$ となるので，

$$\int\frac{x^3}{(2-x^2)^4}dx=\int\frac{1}{t^4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(2-t)dt=\int\left(\frac{1}{2t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt=-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{3t^3}+C$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4(2-x^2)^2}+\frac{1}{3(2-x^2)^3}+C}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$e^x+1=t$ とおくと $e^x=\dfrac{dt}{dx}$ より $e^{3x}dx=e^{2x}dt$　よって $e^{3x}dx=(t-1)^2dt$ となるので,

$$\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}(t-1)^2dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}+2(e^x+1)^{\frac{1}{2}}+C}$$

(3)　$4-x^2=t$ とおくと $-2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x^3dx=-\dfrac{1}{2}x^2dt$　よって $x^3dx=-\dfrac{1}{2}(4-t)dt$

となるので,

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}\,(4-t)dt=\int\left(\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C}$$

(4)　$1+\sqrt{x}=t$ とおくと $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2dt$ となるので,

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}=\int\frac{1}{t}\cdot 2dt=2\log|t|+C=\boldsymbol{2\log(1+\sqrt{x})+C}$$

(5)　$\log x=t$ とおくと $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $dx=x\,dt$　よって $dx=e^t dt$ となるので,

$\displaystyle\int\sin(\log x)dx=\int\sin t\cdot e^t dt$ となる.

ここで $\left\{\dfrac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)\right\}'=e^t\sin t$ となるので

$$\int\sin t\cdot e^t dt=\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)+C=\boldsymbol{\frac{x}{2}\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C}$$

(6)　$x=3\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$ より $dx=\dfrac{3}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，$x=0$ のとき $\theta=0$,

$x=3$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}d\theta=\left[\frac{\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

(7)　$x=2\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より $dx=2\cos\theta\,d\theta$ であり，$x=0$ のとき $\theta=0$，$x=1$

のとき $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ なので

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1)　$f'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ より $x=\dfrac{e^y}{e^y+1}$ を y について解けばよい．

$$(e^y+1)x=e^y \iff e^y(1-x)=x$$
$$\iff e^y=\frac{x}{1-x}$$

よって

$$y=\log\frac{x}{1-x} \qquad \therefore\ \boldsymbol{g(x)=\log\frac{x}{1-x}} \quad (0<x<1)$$

(2)　$\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx$ において $x=f(t)$ と置換すると

$x=f(b)$ のとき $t=b$,　$x=f(a)$ のとき $t=a$,
$dx=f'(t)dt$

であるので

$$\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=\int_a^b tf'(t)dt$$
$$=\Big[tf(t)\Big]_a^b-\int_a^b f(t)dt$$

ゆえに

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　置換積分

20 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする．

(1) I_1 を求めよ．

(2) I_n+I_{n+2} を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を示せ．

【答】 (1) $\frac{1}{2}\log 2$ (2) $\frac{1}{n+1}$ (3) 略

【解説】

(1)

$$
\begin{aligned}
I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx\\
&=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\log 1\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
I_n+I_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\\
&=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}
\end{aligned}
$$

(3) $0<x<\frac{\pi}{4}$ において $\tan x>0$　ゆえに $I_n>0$　このとき

$$0<|I_n|+|I_{n+2}|=I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\to 0\ (n\to\infty)$$

より

$$\lim_{n\to\infty}(|I_n|+|I_{n+2}|)=0$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。